राजस्थान बोर्ड परीक्षा 2019-20
10वीं कक्षा
गणित
मॉडल पेपर 4

समय : $3\frac{1}{4}$ घंटे **(पूर्णांक : 80)**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश–

1. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
2.

भाग	प्रश्न संख्या	अंक प्रत्येक प्रश्न
अ	1-10	1
ब	11-15	2
स	16-25	3
द	26-30	6

3. प्रश्न क्रमांक 27 व 29 में आन्तरिक विकल्प हैं।
4. प्रश्न क्रमांक 26 का लेखाचित्र ग्राफ पेपर पर बनाइए।

भाग-अ

1. सूत्र निखिलम् का प्रयोग करते हुए 54×56 का मान ज्ञात कीजिए। (1)

उत्तर :

यहाँ, आधार $= 10$

उपाधार अंक $= 5$

उपाधार $= 10 \times 5 = 50$

विचलन $=$ संख्या $-$ (आधार अंक $\times$ उपाधार अंक)

$(\text{विचलन})_1 = 54 - (10 \times 5) = 4$

$(\text{विचलन})_2 = 56 - (10 \times 5) = 6$

अतः संख्या में विचलन को जोड़ने पर,

$$= \frac{\begin{matrix} 54 & +4 \\ 56 & +6 \end{matrix}}{\text{उपाधार अंक (संख्या + विपरीत विचलन)/विचलनों का गुणनफल}}$$

$= 5(54+6)/4 \times 6$

$= 5 \times 60/24$

$= 300/24$

$+2$

$= 3024$

2. समीकरण $\frac{2x+4}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x+4}$ को सरल कीजिए। (1)

उत्तर :

दोनों पक्षों के अंशों का योग $= 2x+4+2x+1 = 4x+5$

दोनों पक्षों के हरों का योग $= 2x+1+2x+4 = 4x+5$

दोनों समुच्चय समान हैं, अतः सूत्रानुसार योग को शून्य के समान रखने पर,

$$4x+5 = 0 \Rightarrow 4x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{4}$$

3. 156 संख्या को अभाज्य गुणनखंड के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। (1)

उत्तर :

2	156
2	78
3	39
13	13
	1

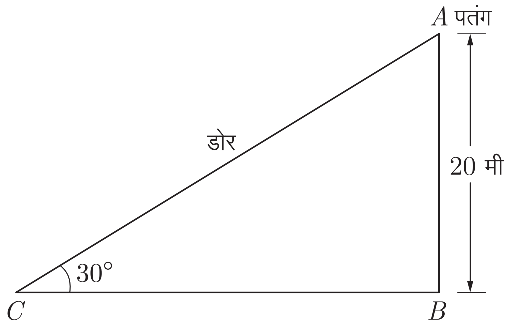
$156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$

$= 2^2 \times 3 \times 13$

4. एक पतंग 20 मी. की ऊँचाई पर उड़ रही है तथा इसकी डोर भूमि के

साथ 30° का कोण बना रही है। डोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (1)

उत्तर :



ΔABC में, हमें दिया है,

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{20}{AC}$$

$$\Rightarrow \quad AC = 40 \text{ मी.}$$

अतः डोर की लम्बाई 40 मी. है।

5. $\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। (1)

उत्तर :

$$\tan^2 60^\circ + 3\cos^2 30^\circ = (\sqrt{3})^2 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

(त्रिकोणमितीय अनुपातों का मान रखने पर, $\tan 60^0 = \sqrt{3}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

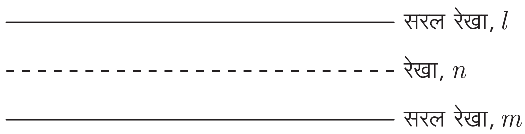
$$= 3 + 3 \times \frac{3}{4}$$

$$= 3 + \frac{9}{4} = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4}$$

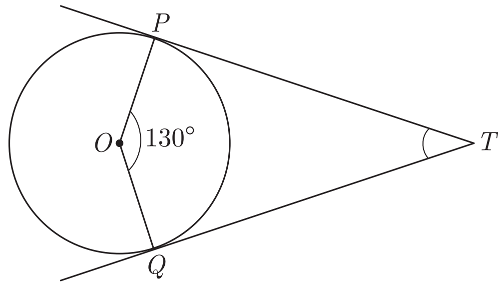
6. दो समान्तर सरल रेखाओं से समान दूरी पर रहने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ लिखिये। (1)

उत्तर :

समान्तर सरल रेखाओं l तथा m के मध्य की समान्तर रेखा n समान दूरी पर रहने वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ है।



7. चित्र में यदि TP और TQ केन्द्र O वाले वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 130^\circ$ तो $\angle PTQ$ ज्ञात कीजिए। (1)



उत्तर :

दिया है, $\angle POQ = 130^0$

$\because$ PT तथा QT दो स्पर्श रेखाएँ हैं अर्थात् $PT \perp OP$ और $OT \perp OQ$ हैं।

अतः, $\angle OPT = \angle OQT = 90^\circ$

$\because$ चतुर्भुज $OPTQ$ में चारों कोणों का योगफल के नियम से,

$$\angle POQ + \angle OQT + \angle OPT + \angle PTQ = 360^0$$

$$130^0 + 90^0 + 90^0 + \angle PTQ = 360^0$$

$$\angle PTQ + 310^0 = 360^0$$

$$\angle PTQ = 360^0 - 310^0$$

$$\angle PTQ = 50^\circ$$

8. एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है। पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (1)

उत्तर :

एक सिक्के को एक बार उछालने पर कुल सम्भव परिणाम $= 2$

पट आने का परिणाम $= 1$

अतः, अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

9. यदि एक टैक्सी का किराया प्रथम किलोमीटर के लिए 12 रूपये है और इसके बाद आने वाले प्रति किलोमीटर के लिये यह किराया 9 रूपये हो तो 15 किमी. चलने के लिए आपको क्या किराया चुकाना पड़ेगा? (1)

उत्तर :

प्रश्नानुसार,

टैक्सी का प्रथम किलोमीटर के लिए किराया, $a = 12$

इसके बाद आने वाले प्रति किलोमीटर के लिए यह किराया अर्थात् सार्वअन्तर, $d = 9$

कुल किलोमीटर रनिंग, $n = 15$

15 किलोमीटर चलने के लिए वया किराया चुकाना पड़ेगा

$$a_{15} = ?$$

अतः सूत्र $a_n = a + (n-1)d$ द्वारा

$$= 12 + (15-1) \times 9$$

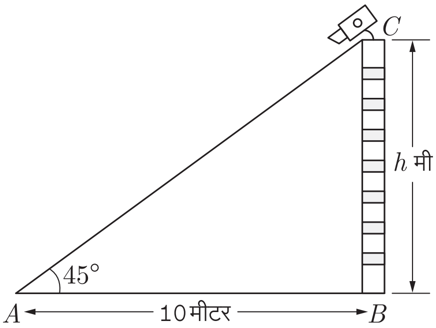
$$= 12 + 14 \times 9 = 12 + 126$$

$= 138$ रुपये

अतः 15 किमी. चलने के लिए 138 रुपये चुकाने पड़ेंगे।

10. चौराहे के किनारे एक खम्भे के शीर्ष पर लगे CCTV कैमरे से सड़क पर किसी कार का उन्नयन कोण $45°$ है एवं खम्भे के आधार से कार की दूरी 10 मीटर है तो खम्भे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (1)

उत्तर :



चित्रानुसार समकोण $\triangle ABC$ में,

हम जानते हैं,

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan 45^0 = \frac{h}{10}$$

$$1 = \frac{h}{10}$$

अतः, $h = 10$ मीटर

अतः खम्भे की ऊँचाई 10 मीटर होगी।

भाग–ब

11. द्वन्द्व योग विधि द्वारा संख्या 2456 का वर्ग ज्ञात कीजिए। (2)

उत्तर :

$(2456)^2$ इसके सात अंक समूह निम्न प्रकार हैं–

2, 24, 245, 2456, 456, 56, 6

$$(2456)^2 = 2^2/2\times4\times2/2\times5\times2+4^2/2\times6 \times2+4\times5\times2/4\times6\times2+5^2/5 \times6\times2/6^2$$

$$= 4/_1 6/_3 6/_6 4/_7 3/_6 0/_3 6$$

$$(2456)^2 = 6031936$$

12. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। (2)

उत्तर :

माना कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, जो x/y के बराबर है। तब $3+2\sqrt{5}=\frac{x}{y}$ होना चाहिए, जबकि $y\neq 0$ और x और y पूर्णांक हैं।

अब, $\frac{x}{y} = 3+2\sqrt{5}$

$$= \left(\frac{x}{y}-3\right) = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{x}{2y}-\frac{3}{2} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-3y}{2y} = \sqrt{5}$$

$\because$ x और y पूर्णांक हैं, अतः $\frac{x-3y}{2y}$ एक परिमेय संख्या है।

$\Rightarrow \sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु, $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या नहीं, अपरिमेय संख्या है, तब यहाँ विरोधाभास है।

इस विरोधाभास के कारण हमारी कल्पना गलत है।

अतः दी गई संख्या $3+2\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।

13. 100 चक्कर में एक स्कूटर का पहिया 88 मीटर की दूरी तय करता है। इस पहिये की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (2)

उत्तर :

दिया है,

पहिया 100 चक्कर में 88 मीटर की दूरी तय करता है।

पहिये द्वारा 1 चक्कर में चली दूरी = पहिये की परिधि

$$= \frac{\text{चली गई दूरी}}{\text{चक्करों की संख्या}} = \frac{88}{100} \text{ मीटर}$$

माना पहिये की त्रिज्या r है, तब

$$2\pi r = \frac{88}{100}$$

$$\Rightarrow \quad 2\times\frac{22}{7}\times r = \frac{88}{100}$$

$$r = \frac{88\times7}{2\times22\times100} \text{ मीटर}$$

$$= \frac{14}{100} \text{ मीटर}$$

$$= \frac{14}{100}\times 100 \text{ सेमी.} = 14 \text{ सेमी.}$$

अतः, पहिये की त्रिज्या $= 14$ सेमी.

14. एक घनाभ की माप 15 सेमी. $\times$ 12 सेमी. $\times$ 6 सेमी. है। इस घनाभ को पिघलाकर 3 सेमी. वाले कितने घन बनाये जा सकते हैं। (2)

उत्तर :

दिया है,

घनाभ की लम्बाई, $l = 15$ सेमी.

चौड़ाई, $b = 12$ सेमी.

ऊँचाई, $h = 6$ सेमी.

घनाभ का आयतन $= l\times b\times h$

$= 15\times12\times6 = 1080$ घन सेमी.

घन की कोर, $a = 3$ सेमी.

घन का आयतन $= a^3 = 3^3 = 27$ घन सेमी.

$\because$ घनाभ को पिघलाकर घन बनाए गए हैं।

$\therefore$ घनाभ से बने घनों की संख्या

$$= \frac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{घन का आयतन}} = \frac{1080}{27} = 40$$

$\therefore$ घनों की संख्या $= 40$

15. एक मोटर कार A स्थान से B स्थान तक 175 किमी. दूरी 70 किमी./घण्टा समान गति से सभी 10 हरे यातायात सिग्नलों को पार करती है। भारी यातायात के कारण यह प्रथम सिग्नल पर एक मिनट, दूसरे सिग्नल पर 3 मिनट, तीसरे सिग्नल पर 5 मिनट एवं इसी प्रकार दसवें सिग्नल पर 19 मिनट रूकती है। स्थान B तक पहुँचने में इसे कुल कितना समय लगेगा? उपयुक्त गणितीय विधि से हल कीजिए। (2)

उत्तर :

मोटर कार A स्थान से B स्थान तक बिना रूके जाने का समय

$$= \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{175 \text{ किमी.}}{70 \text{ किमी./घण्टा}}$$

$$= 2.5 \text{ घण्टा}$$

अर्थात् 2 घण्टे 30 मिनट

प्रश्नानुसार, मोटरकार द्वारा सिग्नलों पर रूकने में लिये गये कुल समयों को श्रेणी के रूप में लिखते हैं तब

1, 3, 5,.....19

$$a = 1,\ d = 3 - 1 = 2,\ n = 10$$

$\because$ सिग्नलों की संख्या $= 10$ है।

इसलिए सिग्नलों पर रूकने में लिया गया कुल समय,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

मान रखने पर, $S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 1 + (10-1) \times 2]$

$$= 5[2 + 9 \times 2]$$

$$= 5[2 + 18] = 5 \times 20$$

$$= 100 \text{ मिनट}$$

अतः मोटरकार द्वारा A से B तक पहुँचने में लिया गया कुल समय

$$= 2 \text{ घण्टा } 30 \text{ मिनट} + 100 \text{ मिनट}$$

$$= 4 \text{ घण्टा } 10 \text{ मिनट}$$

भाग–स

16. बहुपद $f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$ को बहुपद $g(x) = x - 1 - x^2$ द्वारा विभाजन एल्गोरिथ्म विधि से विभाजित कीजिए तथा भागफल और शेषफल ज्ञात कीजिए। (3)

उत्तर :

$$f(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$$

$$g(x) = x - 1 - x^2$$

सर्वप्रथम भाजक एवं भाज्य के पदों को घटती हुई घातों के क्रम में लिखते हैं।

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

$$g(x) = -x^2 + x - 1$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline -x^2+x-1 & -x^3+3x^2-3x+5 \\ & -x^3+\ x^2-\ x \\ & \underline{+ \quad - \quad +} \\ & \quad 2x^2-2x+5 \\ & \quad 2x^2-2x+2 \\ & \quad \underline{- \quad + \quad -} \\ & \qquad\qquad 3 \text{ शेषफल} \end{array}$$

अतः, भागफल $= x - 2$ तथा शेषफल $= 3$

विभाजन एल्गोरिथ्म की जाँच करने पर,

भाजक $\times$ भागफल $+$शेषफल $=$ भाज्य

$$(-x^2 + x - 1) \times (x - 2) + 3 = -x^3 + x^2 - x + 2x^2$$

$$-2x + 2 + 3$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$$

$$= \text{भाज्य}$$

17. यदि एक समान्तर श्रेणी का तृतीय पद 7 है तथा सातवाँ पद, तृतीय पद के तीन गुना से दो अधिक है, तो उसके प्रथम 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए। (3)

उत्तर :

माना कि दी गई श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है।

दिया हैः

तृतीय पद, $a_3 = 7$

अर्थात् $a + 2d = 7$ ...(1)

तथा सातवां पद, तृतीय पद के तीन गुना से दो अधिक हैं।

अर्थात्, $a_7 = 3a_3 + 2$

$\Rightarrow$ $a + 6d = 3(a + 2d) + 2$

$\Rightarrow$ $a + 6d = 3a + 6d + 2$

$\Rightarrow$ $a - 3a = 2$

$\Rightarrow$ $-2a = 2$

$\Rightarrow$ $a = \frac{2}{-2} = -1$

a का मान समी. (1) में रखने पर,

$$-1 + 2d = 7$$

$\Rightarrow$ $2d = 7 + 1 = 8$

$\Rightarrow$ $d = \frac{8}{2} = 4$

अतः, $a = -1,\ d = 4$

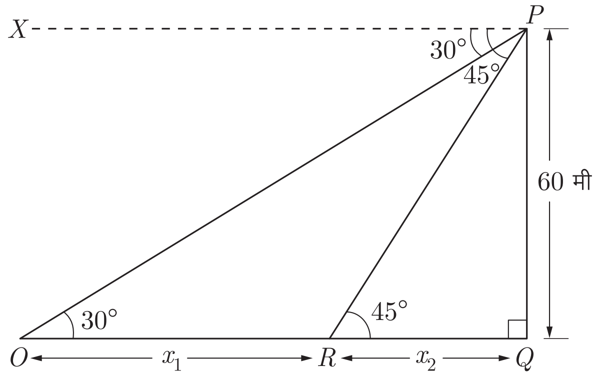
सूत्र, $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times (-1) + (20-1) \times 4\}$$

$$= \frac{20}{2}(-2 + 76) = 740$$

18. समुद्र तल से 60 मीटर ऊँचे लाइट हाऊस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° व 45° हैं। यदि लाइट हाऊस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो, तो जहाजों के मध्य की दूरी ज्ञात कीजिए। (3)

उत्तर :
माना कि O और R जहाज की दो स्थितियाँ हैं और प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी x_1 मीटर है।



माना प्रेक्षक बिन्दु P पर है और R और Q की दूरी x_2 मीटर है। बिन्दु P से O और R के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है।

चित्र में, $OR = x_1,\ RO = x_2$

अब समकोण ΔPQR में,

$$\tan 45^\circ = \frac{PO}{RQ} = \frac{60}{x_2}$$

या $$1 = \frac{60}{x_2}$$

$\therefore$ $$x_2 = 60 \text{ मीटर}$$

पुनः समकोण ΔPQR में,

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{60}{OR + RQ}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{60}{x_1 + x_2}$$

$\Rightarrow$ $$x_1 + x_2 = 60\sqrt{3}$$

x_2 का मान रखने पर,

$$x_1 + 60 = 60\sqrt{3}$$

या $$x_1 = 160\sqrt{3} - 100$$
$$= 60(\sqrt{3} - 1)$$
$$= 60 \times .732 = 43.92 \text{ मीटर}$$

अतः दोनों जहाजों के बीच की दूरी 43.92 मीटर है।

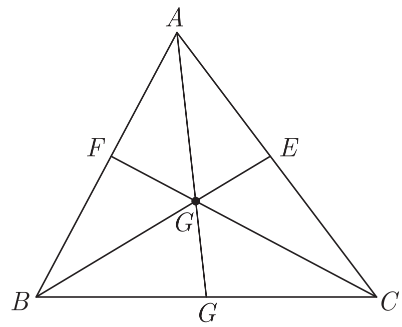
19. एक ΔABC में माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिये कि– (3)

$4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$

उत्तर :
दिया है– ΔABC की माध्यिकाएँ AD, BE और CF का प्रतिच्छेद बिन्दु G है।

सिद्ध करना है– $4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$

उपपत्ति– $\because$ माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु G है।



$\therefore$ $$AG : GD = 2 : 1$$
$$\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{GD}{AG} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{AG + GD}{AG} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$$
$$AD = \frac{3}{2}AG \quad ...(1)$$

इसी प्रकार से, $$BE = \frac{3}{2}BG \quad ...(2)$$

और $$CF = \frac{3}{2}CG \quad ...(3)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) से,

$$AD + BE = \frac{3}{2}(AG + BG)$$

परन्तु ΔAGB में,

$$AG + BG > AB$$

$\therefore$ $$AD + BE > \frac{3}{2}AB$$

$\therefore$ $$2(AD + BE) > 3AB \quad ...(4)$$

समीकरण (2) व समीकरण (3) को जोड़ने पर,

$$BE + CF = \frac{3}{2}(BG + GC)$$

$\therefore$ $$BE + CF > \frac{3}{2}BC \quad (\because BG + GC > BC)$$

$\therefore$ $$2(BE + CF) > 3BC \quad ...(5)$$

$$CF + AD = \frac{3}{2}(GC + AG)$$

$\therefore$ $$CF + AD > \frac{3}{2}CA \quad (\because GC + AG > GA)$$

$\therefore$ $$2(CF + AD) > 3CA \quad ...(6)$$

समीकरण (4), (5) व (6) को जोड़ने पर,

$$2(AD + BE) + 2(BE + CF) + 2(CF + AD) > 3AB + 3BC + 3CA$$

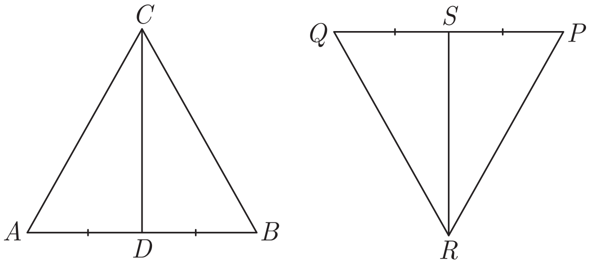
$$\Rightarrow 4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$$

इतिसिद्धम्

20. आकृति में CD और RS क्रमशः ΔABC और ΔPQR की माध्यिकाएँ हैं। यदि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हों तो सिद्ध कीजिए कि

1. $\Delta ADC \sim \Delta PSR$

2. $\frac{CD}{RS} = \frac{AB}{PQ}$ (3)



उत्तर :

(1) दिया हैः दो समरूप ΔABC तथा PQR है। CD तथा RS क्रमशः AB तथा PQ पर लम्ब है।

सिद्ध करना है– $\Delta ADC \sim \Delta PSR$

उपपत्ति– $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$

$\Rightarrow \frac{CA}{RP} = \frac{2AD}{2PS}$

(क्योंकि D और S, AB तथा PQ की माध्यिकाएँ हैं।)

अब $\angle ACD$ और ΔPRS में,

$$\frac{CA}{RP} = \frac{AD}{PS}$$

और $\angle A = \angle P$ $(\because \Delta ABC \sim \Delta PQR)$

$$\angle ADC = \angle PSR = 90^\circ$$

अतः कोण–कोण समरूपता गुणधर्म से,

$$\Delta ADC \sim \Delta PSR$$ इतिसिद्धम

(2) दिया है–

$$\Delta ADC \sim \Delta PSR$$

सिद्ध करना हैः $\frac{CD}{RS} = \frac{AB}{PQ}$

उपपत्ति– $\because$ दिया है कि ΔABC एवं ΔPQR समरूप हैं। अतः

$$\angle A = \angle P \quad ...(1)$$

($\because$ समरूप त्रिभुज के संगत कोण समान होते हैं)

$$\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ} = \frac{CB}{RQ} \quad ...(2)$$

अब ΔCAD एवं ΔRPS में

$$\angle A = \angle P \quad \text{(दिया है)}$$

$$\angle CDA = \angle RSP = 90^\circ$$

कोण–कोण समरूपता गुणधर्म से,

$$\Delta CDA \sim \Delta RSP$$

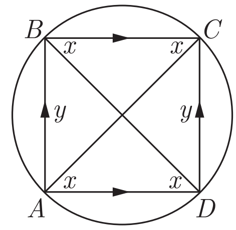
$$\frac{CA}{RP} = \frac{CD}{RS} \quad ...(3)$$

समीकरण (2) व (3) से

$$\frac{CD}{RS} = \frac{AB}{PQ}$$ इतिसिद्धम्

21. यदि चक्रीय चतुर्भुज $ABCD$ में $AD || BC$ हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle D$ (3)

उत्तर :



दिया हुआ है– $ABCD$ एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें $AD || BC$

सिद्ध करना है– $\angle A = \angle D$

रचना– A व B को क्रमशः C व D से मिलाओ।

उपपत्ति– यदि $\angle BCA = x$, तब $\angle BDA = x$

एक ही खण्ड कोण है।

आगे $BC || AD$

$\therefore$ $\angle CAD = \angle BCA = x$ एकान्तर कोण है।

या $\angle CAD = \angle BDA$ ...(1)

अब $\angle CAB = \angle BDC$ ...(2)

एक ही खण्ड कोण है।

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$\angle CAD + CAB = \angle BDA + \angle BDC$$

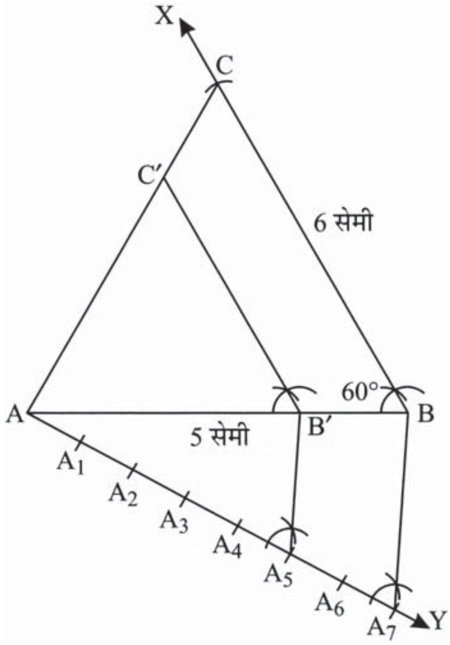
अर्थात् $\angle A = \angle D$ इतिसिद्धम्

22. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 6$ सेमी और $\angle ABC = 60^\circ$ है। एक दूसरा त्रिभुज बनाइए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{7}$ हो। (3)

उत्तर :

रचना के चरणः

1. एक रेखाखण्ड $AB = 5$ सेमी. खींचिए।
2. B पर $\angle ABX = 60^\circ$ बनाइए।
3. B को केन्द्र और त्रिज्या 6 सेमी. लेकर एक चाप लगाइए जोकि BX को C पर काटता है।
4. AC को मिलाइए। तब ABC अभीष्ट त्रिभुज है।
5. कोई एक किरण AY इस प्रकार खींचिए जो शीर्ष C की विपरीत दिशा में हो और AB के साथ न्यूनकोण बनाती है।
6. AY पर सात बिन्दु ($\frac{5}{7}$ में 5 तथा 7 में बड़ी संख्या) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ और A_7 इस प्रकार अंकित कीजिए कि $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7$.
7. A_7B को मिलाइए तथा A_5 ($\frac{5}{7}$ में 5 तथा 7 में सबसे छोटी संख्या अर्थात् पाँचवा बिन्दु) में से A_7B के समांतर एक रेखा खींचिए जोकि AB को B' पर काटती है।
8. B' में से BC के समांतर एक रेखा खींचिए जो AC को C' पर काटती है। इस प्रकार अभीष्ट त्रिभुज $AB'C'$ प्राप्त होता है।



23. त्रिज्या 21 सेमी. वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए। (3)

1. चाप की लम्बाई
2. चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
3. संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

उत्तर :

प्रश्नानुसार,

$$r = 21 \text{ सेमी.}, \ \theta = 60^\circ$$

1. चाप की लम्बाई,

$$l = \frac{\theta}{180} \times \pi r$$
$$= \left(\frac{60}{180} \times \frac{22}{7} \times 21\right) \text{ सेमी.}$$
$$= 22 \text{ सेमी.}$$

2. त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$
$$= \left(\frac{60}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21\right) \text{सेमी.}^2$$
$$= 231 \text{सेमी.}^2$$

3. वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{1}{2}\sin\theta\right]$$
$$= (21)^2\left[\frac{22}{7} \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2}\sin 60^\circ\right] \text{सेमी.}^2$$
$$= 441\left(\frac{11}{21} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{सेमी.}^2$$
$$= \left(21 \times 11 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{सेमी.}^2$$
$$= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right) \text{सेमी.}^2$$
$$= 231 - \frac{441 \times 1.732}{4}$$
$$= 231 - 190.953$$
$$= 40.047 \text{ सेमी.}^2$$

24. एक बेलन की ऊँचाई व त्रिज्या क्रमशः 7.5 सेमी. और 3.5 सेमी. है। इसके सम्पूर्ण पृष्ठ के क्षेत्रफल और वक्र पृष्ठ के क्षेत्रफल में अनुपात ज्ञात कीजिए। (3)

उत्तर :

बेलन की ऊँचाई, $(h) = 7.5$ सेमी.

त्रिज्या, $(r) = 3.5$ सेमी.

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r(r+h)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(3.5+7.5)$$
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 11 \text{ सेमी.}$$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षे. $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 7.5 \text{ सेमी.}^2$$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल : वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 11 : 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 7.5$$

11 : 7.5

या 110 : 75

या 22 : 15

25. 52 ताश के पत्तों की गड्डी से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है। इसके (1) इक्का (2) हुक्म का '2' (3) काले रंग का '10' होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (3)

उत्तर :

1. $\because$ गड्डी में 4 इक्के होते हैं, अतः इक्का निकलने के अनुकूल अवसरों की संख्या $= 4$
   जबकि कुल सम्भव परिणामों की संख्या 52 है।
   $\therefore P$ (इक्का निकालने के लिये) $= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
2. $\because$ हुक्म के '2' का केवल एक पत्ता है, अतः घटना के अनुकूल अवसर $= 1$
   $\therefore$ हुक्म का '2' निकलने की प्रायिकता $= \frac{1}{52}$
3. $\because$ काले पत्तों में '10' के दो पत्ते हैं अतः घटना के अनुकूल अवसर $= 2$
   अतः काला '10' निकालने की प्रायिकता $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

भाग–द

26. रैखिक समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिये। x–अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के

निर्देशांक ज्ञात कीजिये और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए। (6)

उत्तर :
रैखिक समीकरण युग्म लेने पर,

$$x - y + 1 = 0$$

और $$3x + 2y - 12 = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

या $y = x + 1$

$x = 1$ रखने पर तब, $y = 1 + 1 = 2$

$x = 2$ रखने पर तब, $y = 2 + 1 = 3$

अतः सारणी प्राप्त होती है,

x	1	2
y	2	3

बिन्दु $A(1,2)$, $B(2,3)$ को आलेखित करने और उनको मिलाकर रेखा खींचने पर हमें समीकरण $x - y + 1 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।

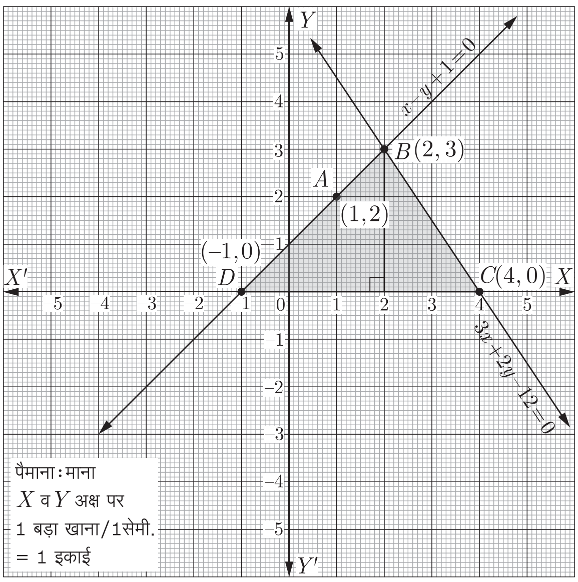
पुनः दूसरे समीकरण से,

$$3x + 2y - 12 = 0$$

या $2y = 12 - 3x$

या $y = \dfrac{12 - 3x}{2}$

$x = 2$ रखने पर तब, $y = \dfrac{12 - 3 \times 2}{2} = \dfrac{12 - 6}{2}$



$y = \dfrac{6}{2} = 3$

$x = 4$ रखने पर तब, $y = \dfrac{12 - 3 \times 4}{2} = \dfrac{12 - 12}{2}$

$y = \dfrac{0}{2} = 0$

अतः सारणी प्राप्त होती है–

x	2	4
y	3	0

बिन्दुओं $B(2,3)$, $C(4,0)$ को आलेखित करने पर और उनको मिलाकर रेखा खींचने पर हमें समीकरण $3x + 2y - 12 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है। रैखिक समीकरणों के युग्म और x–अक्ष द्वारा बनाये गये त्रिभुज के शीर्षों को आलेख में छायांकित किया गया है। ΔBCD इस प्रकार बना त्रिभुज है।

ΔBCD के शीर्षों के निर्देशांक हैं–

$B(2,3), C(4,0), D(-1,0)$

27. सिद्ध कीजिये कि– (3+3)

1. $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \cos\theta$
2. $\dfrac{1 + \cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)} = \cot\theta$

उत्तर :

1. $$\text{L.H.S.} = (\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta)$$
$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin\theta)$$
$$= \left(\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin\theta)$$
$$[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$
$$= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\therefore 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$
$$= \cos\theta = \text{R.H.S.}$$

2. $$\text{L.H.S.} = \frac{1 + \cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$
$$= \frac{\cos\theta + (1 - \sin^2\theta)}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$
$$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\therefore 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$
$$= \frac{\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$
$$= \frac{\cos\theta(1 + \cos\theta)}{\sin\theta(1 + \cos\theta)}$$
$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$
$$= \text{R.H.S.}$$ इतिसिद्धम्

अथवा

27. 1. सिद्ध कीजिए कि –

$$\frac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta \quad (3)$$

2. यदि $\tan\theta + \sin\theta = m$ तथा $\tan\theta - \sin\theta = n$ तो सिद्ध कीजिए: $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ (3)

उत्तर :

(1) $$\text{L.H.S.} = \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta/\cos\theta}{1-\cos\theta/\sin\theta} + \frac{\cos\theta/\sin\theta}{1-\sin\theta/\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta\left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta-\cos\theta)}\left[\frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)}{(\sin\theta-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}$$

$$[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)]$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= 1+\tan\theta+\cot\theta = \text{R.H.S.}$$ इतिसिद्धम्

2. दिया है,

$$m = \tan\theta+\sin\theta$$

$$n = \tan\theta-\sin\theta$$

$$\text{L.H.S.} = m^2-n^2$$

$$= (\tan\theta+\sin\theta)^2-(\tan\theta-\sin\theta)^2$$

$$= (\tan\theta+\sin\theta+\tan\theta-\sin\theta)$$
$$-(\tan\theta+\sin\theta-\tan\theta+\sin\theta)$$

$$[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$$

$$= (2\tan\theta)(2\sin\theta) = 4\tan\theta\sin\theta$$

$$= 4\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{4\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}} = 4\sqrt{\frac{\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= 4\sqrt{\tan^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$= 4\sqrt{(\tan\theta+\sin\theta)(\tan\theta-\sin\theta)}$$

$$= 4\sqrt{mn}$$

$$= \text{R.H.S.}$$

अतः $m^2-n^2 = 4\sqrt{mn}$ इति सिद्धम्

28. 1. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज AOB में कर्ण का मध्य बिन्दु C त्रिभुज के शीर्षों O, A और B से बराबर दूरी पर स्थित है। (3)

2. बिन्दुओं (15,5) और (9,20) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (11,15) किस अनुपात में विभाजित करता है? (3)

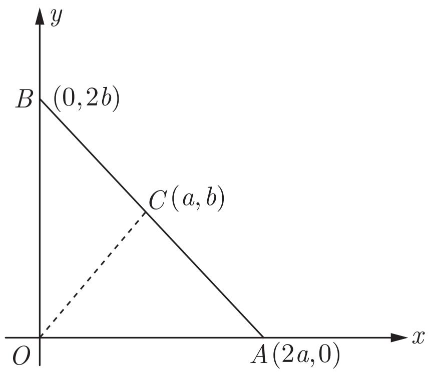
उत्तर :

1. $A = (2a, 0)$ तथा $B = (0, 2b)$

$\therefore$ मध्य बिन्दु $= (C)$

$$C = \left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{2a+0}{2}, \frac{0+2b}{2}\right] = (a, b)$$



$$OC \text{ की दूरी} = \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

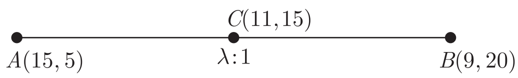
$$AC \text{ की दूरी} = \sqrt{(a-2a)^2+(b-0)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

$$BC \text{ की दूरी} = \sqrt{(a-0)^2+(b-2b)^2}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}$$

$\because$ $OC = AC = BC$

अतः समकोण ΔAOB में कर्ण का मध्य बिन्दु C त्रिभुज के शीर्षों O, A तथा B से बराबर दूरी पर स्थित है। इतिसिद्धम्

2. माना कि बिन्दु $C(11,15)$ दिए गए रेखाखण्ड AB को $\lambda:1$ अनुपात में विभाजित करता है।



$\therefore$ बिन्दु C के निर्देशांक $\left[x = \frac{9\lambda+15}{\lambda+1}, y = \frac{5+20\lambda}{\lambda+1}\right]$

परन्तु प्रश्नानुसार बिन्दु C के निर्देशांक (11,15) हैं।

विभाजन के सूत्र से,

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$$

$\therefore$ $$\frac{9\lambda+15}{\lambda+1} = 11$$

या $$9\lambda+15 = 11\lambda+11$$

$\Rightarrow$ $$9\lambda-11\lambda = 11-15$$

$$-2\lambda = -4$$

$\therefore \quad \lambda = 2$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात 2:1 होगा।

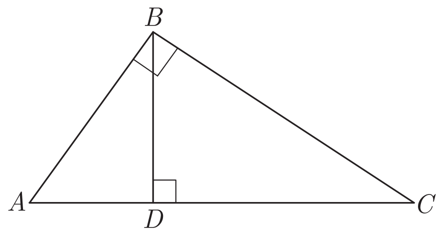
29. सिद्ध करो कि समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना कोण शेष भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है। (6)

उत्तर :

दिया हुआ है– ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण $B, 90^\circ$ है।

सिद्ध करना है– $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना– B से AC पर लम्ब BD डाला।



उपपत्ति– ΔADB एवं ΔABC में

$\angle ADB = \angle ABC$ (प्रत्येक 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ)

अतः AA समरूपता प्रमेय से,

$\Delta ADB \sim \Delta ABC$

$\Rightarrow \quad \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

$\Rightarrow \quad AB^2 = AC \times AD$ ...(1)

ΔBDC एवं ΔABC में,

$\angle CDB = \angle ABC$ (प्रत्येक कोण 90° दिया हुआ एवं रचना से)

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ)

अतः $A - A$ समरूपता प्रमेय से,

$\Delta CDB \sim \Delta CBA$

$\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{BC}{AC}$ (आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय)

या $\quad \dfrac{DC}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \quad BC^2 = AC \times DC$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर,

$$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC)$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 = AC \times AC$$

$$\Rightarrow \quad AC^2 = AB^2 + BC^2$$

इतिसिद्धम्

अथवा

29. सिद्ध कीजिए कि वृत्त की दो जीवाओं में से बड़ी जीवा केन्द्र के निकट होती है। (6)

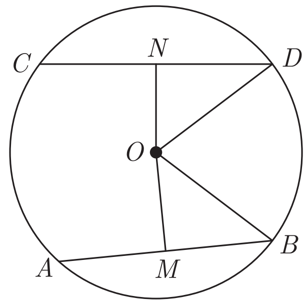
उत्तर :

दिया है– आकृति में, एक वृत्त जिसका केन्द्र O है और जीवा $CD >$ जीवा AB

सिद्ध करना है– $ON < OM$

रचना– OB और OD को मिलाया।

उपपत्ति– OM और ON क्रमशः AB और CD पर लम्ब हैं।



अतः $\quad MB = \frac{1}{2}AB$ और $ND = \frac{1}{2}CD$ ...(1)

अब ΔOMB में,

$MB^2 = OB^2 - OM^2$ ...(2)

और ΔOND में,

$ND^2 = OD^2 - ON^2$ ...(3)

दिया है कि $AB < CD$,

या $\quad \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD$

या $\quad MB < ND$ (समीकरण (1) से)

या $\quad MB^2 < ND^2$ ...(4)

समीकरण (2), (3) और (4) से,

$$(OB^2 - OM^2) < (OD^2 - ON^2)$$

परन्तु $\quad OB = OD$ (वृत्त की त्रिज्या) है

अतः $\quad -OM^2 < -ON^2$

या $\quad OM^2 > ON^2$

या $\quad OM > ON$

या $\quad ON < OM$ इतिसिद्धम्

30. निम्नलिखित सारणी 35 नगरों की साक्षरता दर (प्रतिशत में) दर्शाती है। माध्य साक्षरता दर ज्ञात कीजिए। (6)

साक्षरता दर (% में)	45–55	55–65	65–75	75–85	85–90
नगरों की संख्या	3	10	11	8	3

उत्तर :

माना कल्पित माध्य, $\quad A = 10$

वर्ग माप, $\quad h = 10$

पद–विचलन विधि से,

साक्षरता दर (% में)	नगरों की संख्या (f_i)	माध्य बिन्दु (x_i)	$u_i = \frac{x_i - A}{h}$ या $u_i = \frac{x_i - 70}{10}$	$f_i u_i$	
45-55	3	50	-2	-6	-16
55-65	10	60	-1	-10	
65-75	11	$70 = A$	0	0	
75-85	8	80	1	8	14
85-95	3	90	2	6	
योग	$\sum f_i = 35$			$\sum f_i u_i = -2$	

$$\text{माध्य } (\overline{x}) = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) \times h$$

$$\Rightarrow \quad \overline{x} = 70 + \frac{-2}{35} \times 10 = 70 + \frac{-20}{35}$$

$$= 70 + (-0.57)$$

$$= 70 - 0.57 = 69.43$$

अतः माध्य साक्षरता दर $= 69.43\%$ है।

****